Théorème de FEJÉR

ÉNONCÉ :

Théorème :

1. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors $||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$ pour $N \geq 1$ et $\sigma_N(f) = f * K_N$ converge uniformément vers f.
2. Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p \in [1, +\infty[$. Alors $||\sigma_N(f)||_p \leq ||f||_p$ pour tout $N \geq 1$ et on a :

$$\lim_{N \to +\infty} ||\sigma_N(f) - f||_p = 0$$

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : Pour $p \in [1, +\infty[$, $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$, l'application Φ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & L^p_{2\pi}(\mathbb{R}) \\ & a & \longmapsto & \tau_a f \end{array}$$

est uniformément continue.

Démonstration.

- Cas où $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$: f étant uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$$

Ainsi, dès que $|a - b| \leq \delta$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, il vient que :

$$||\tau_b f - \tau_a f||_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - a) - f(x - b)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$$

- Cas où $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$: Fixons $\epsilon > 0$. On dispose par densité de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ dans $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ d'une fonction $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ telle que $||f - g||_p \leq \frac{\epsilon}{4}$. De plus, l'uniforme continuité de Φ_g sur $\mathbb{R}$ nous assure l'existence d'un $\delta > 0$ tel que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(|a - b| \leq \delta) \Rightarrow \left(||\Phi_g(a) - \Phi_g(b)||_p \leq \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} ||\Phi_f(b) - \Phi_f(b)||_p &\leq 2||f - g||_p + ||\Phi_g(b) - \Phi_g(a)||_p \\ &\leq 2\epsilon + ||\Phi_g(b) - \Phi_g(a)||_p \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

d'où le résultat.

$\square$

Démonstration. (théorème) :

1. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. On a :

$$||\sigma_N(f)||_\infty = ||f * K_N||_\infty \leq ||f||_\infty$$

Considérons le module de continuité de f définie par $\omega : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

$$\omega(\eta) = \sup\{|f(u) - f(v)| \mid u, v \in \mathbb{R}, |u - v| \leq \eta\}$$

Soient $\delta > 0$ et $x \in \mathbb{T}$, on a alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \left|f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - t) K_N(t) dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x - t)| K_N(t) dt \\ &\leq \omega(\delta) + 2||f||_\infty \sup_{|t| \in [\delta, \pi]} K_N(t) \end{aligned}$$

Or $\sup_{|t|\leq[\delta,\pi]} K_N(t) \leq \frac{1}{N\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$, d'où :

$$||f - \sigma_N(f)||_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{2||f||_\infty}{N\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Comme $\delta > 0$ est arbitraire, il vient, en passant à la limite supérieure :

$$\limsup_{N\to+\infty}||f - \sigma_N(f)||_\infty \leq \inf_{\delta\in\mathbb{R}_{+^*}} \omega(\delta)$$

Mais comme $\omega(0) = 0$ et que ω est continue en 0 par uniforme continuité de f sur $\mathbb{T}$, on en déduit que :

$$||f - \sigma_N(f)||_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

2. Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$. Soit $x \in \mathbb{T}$. En vertu de l'inégalité de HÖLDER appliquée à la mesure de probabilité $t \mapsto K_N(t)\frac{dt}{2\pi}$, il vient :

$$|\sigma_N(f)(x)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-t)|^p K_N(t)dt$$

Ainsi, par le théorème de FUBINI-TONELLI, on a :

$$||\sigma_N(f)||_p^p \leq ||f||_p^p\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(t)dt = ||f||_p^p$$

De même, on a :

$$||f - \sigma_N(f)||_p^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(t)g(t)dt = \sigma_N(g)(0)$$

où $g : t \mapsto ||f - \tau_t f||_p^p$ est continue. Par (1), on en déduit que $||\sigma_N(f) - f||_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

□

Remarques :

- On utilise le théorème de HEINE sur le compact $\mathbb{T}$ qu'il faut savoir montrer.
- On utilise l'isomorphisme $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ afin d'identifier bijectivement l'ensemble $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ à $L^p(\mathbb{T})$.
- On utilise les faits suivants : K_N est positif et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{T}$:

$$K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

  . De plus, $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)dt = 1$.
- ω est continue en 0 puisque pour tout $\epsilon > 0$, il existe η tel que $\omega(\eta) < \epsilon$ par uniforme continuité de f. Ainsi, $\omega \leq \epsilon$ sur $]0, \eta]$ d'où $\omega(0^+) \leq \epsilon$.
- Il faut connaître quelques unes de ses nombreuses applications (base hilbertienne dans $L^2(\mathbb{T})$, injectivité des coefficients d'une fonction L^1, etc.).